محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

تقارن چندضلعی‌ها

اشاره

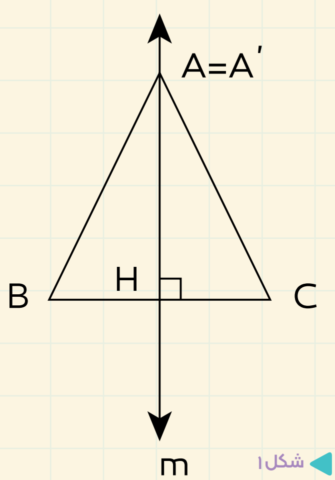
در بخش قبلی «تقارن» را تعریف کردیم و توانستیم همهٔ تقارن‌های مربع را تعیین کنیم. چون تعیین تقارن‌های مثلث و چندضلعی‌ها نقش اساسی در تعیین تقارن‌های شکل‌های دیگر دارد، در این شماره تقارن‌های چندضلعی‌ها و به‌ویژه مثلث را بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱. همهٔ تقارن‌های مثلث را تعیین کنید.

ابتدا به دنبال تقارن‌های خطی می‌رویم. مثلث سه رأس دارد. با توجه به این ویژگی مثلث فکر می‌کنید اگر مثلث تقارن خطی داشته باشد، این تقارن باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

سعی کنید شکل‌های متفاوت رسم کنید و تعریف تقارن را در نظر داشته باشید. شاید بتوانید به نتیجه‌گیری خوبی برسید. اگر قرار باشد نسبت به یک بازتاب، مثلث بر خودش منطبق شود، چون سه رأس داریم، پس باید حتماً بازتاب یک رأس بر خودش منطبق شود. این کلید حل مسئله است.

بنابراین باید خط بازتاب از یک رأس مثلث بگذرد. یعنی اگر مثلثی دارای بازتاب خطی باشد، خط این بازتاب حتماً باید از یک رأس مثلث بگذرد. اکنون باید دو رأس دیگر یکی بر دیگری منطبق شود. در شکل ۱ اگر این دو رأس B و C باشند، باید B بازتاب C و C بازتاب B نسبت به خطی بازتابی باشند که از A گذشته است. از این ویژگی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



شکل ۱

بله درست فهمیده‌اید، باید: AB=AC؛ یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد. در این صورت m خط بازتاب نیم‌ساز زاویهٔ A یا عمودمنصف ضلع BC است؛ چرا؟ بنابراین تا اینجا می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بیان کنیم:

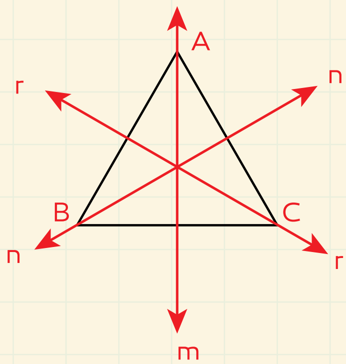
اگر مثلثی دارای یک تقارن خطی باشد، خط تقارن نیم‌ساز زاویهٔ یک رأس از مثلث است و این مثلث باید در آن رأس متساوی‌الساقین باشد.

پس اگر مثلثی در هیچ رأسی متساوی‌الساقین نباشد، آنگاه این مثلث هیچ‌تقارن خطی ندارد. یعنی مثلثی که هیچ دو ضلع یا دو زاویهٔ هم‌اندازه نداشته باشد، تقارن خطی ندارد.

اکنون به یک نتیجهٔ خوب می‌رسیم: «مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه تقارن خطی است»؛ چرا؟

اما در اینجا پرسشی چالشی را هم مطرح می‌کنیم: «آیا مثلثی وجود دارد که فقط دو تقارن خطی داشته باشد؟»
حتماً سعی کنید قبل از توضیح بعدی خودتان پاسخ را پیدا کنید. چگونه آن را ثابت می‌کنید؟

شکل ۲



فرض کنید مثلث ABC دارای دو تقارن خطی باشد. بنابر آنچه قبلاً توضیح دادیم، هر خط در تقارن خطی مثلث باید از یک رأس بگذرد. فرض کنیم در شکل ۲ خط‌های m و n که از رأس‌های A و B گذشته‌اند، دو خط تقارن مثلث ABC باشند.

از اینکه خط m، خط تقارن است، نتیجه می‌گیریم: AB=AC. و از اینکه خط n، خط تقارن است، نتیجه می‌گیریم: AB=BC.

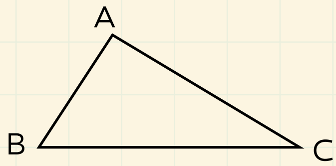
از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم: CA=CB. یعنی مثلث در رأس C هم باید متساوی‌الساقین و مثلث خط تقارن دیگری نیز دارد که از رأس C می‌گذرد. بنابراین ثابت کرده‌ایم که:

اگر مثلثی دارای دو تقارن خطی باشد، آنگاه دارای سه تقارن خطی است. یعنی هیچ مثلثی وجود ندارد که فقط دو تقارن خطی داشته باشد.

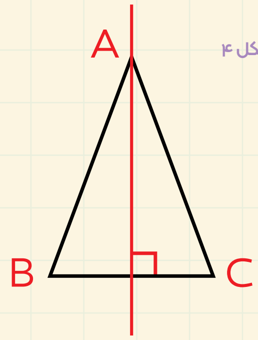
اکنون می‌توانیم در مورد تقارن‌های خطی هر مثلث جمع‌بندی زیر را داشته باشیم:

هر مثلث، یا هیچ تقارن خطی ندارد یا یک یا سه تقارن خطی دارد (شکل‌های ۳ تا ۵).

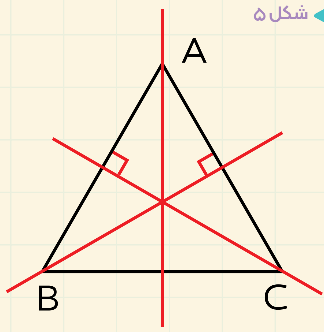
شکل ۳



شکل ۴

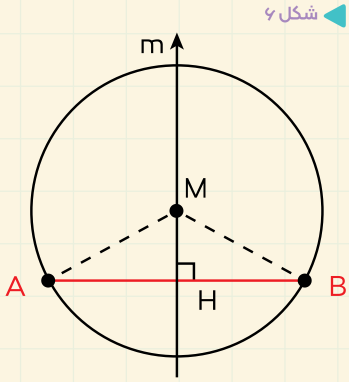


شکل ۵



اکنون تقارن‌های دورانی مثلث را بررسی می‌کنیم: قبلاً با ویژگی عمودمنصف پاره‌خط آشنا شده‌ایم. هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، و برعکس، اگر در صفحهٔ پاره‌خط، نقطه‌ای از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد. با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌ها این ویژگی به سادگی ثابت می‌شود.

شکل ۶



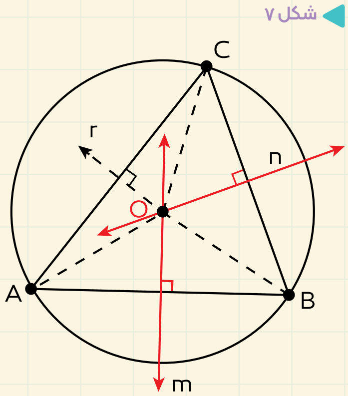
در شکل ۶ اگر m عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد، آن‌گاه برای هر نقطهٔ M روی m، اگر M روی وسط $\overline{AB}$ باشد MA=MB، در غیر این‌صورت، دو مثلث MHB و MHA به حالت «ض‌ـ ز‌ـ ض» هم‌نهشت‌اند؛ پس: MA=MB. برعکس اگر M نقطه‌ای در صفحهٔ پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد و: MA=MB. مثلث MAB متساوی‌الساقین است پس M روی عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ است؛ چرا؟
این ویژگی یک نتیجهٔ بسیار مهم دارد: اگر به مرکز M و شعاع MA=MB دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقطه‌های A و B می‌گذرد. این یکی از ویژگی‌های عمودمنصف پاره‌خط است که در حل مسئله‌های ترسیمی هندسه بسیار کاربرد دارد. بنابراین:

نقطه‌های روی عمودمنصف هر پاره‌خط مرکز دایره‌هایی هستند که از دو سر پاره‌خط می‌گذرند.

اکنون مسئله‌ای مهم را می‌توان طرح کرد:

مسئلهٔ ۲. چگونه دایره‌ای رسم کنیم که از سه رأس یک مثلث بگذرد؟
کلید حل مسئله در ویژگی عمودمنصف است. کمی فکر کنید. در شکل ۷ اگر دایره از A و B بگذرد، مرکز آن کجاست؟ اگر دایره از B و C بگذرد مرکز آن کجا باید باشد؟

شکل ۷



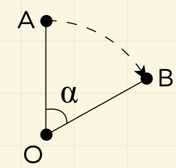
بله درست حدس زده‌اید. باید مرکز این دایره هم روی عمودمنصف $\overline{AB}$ و هم روی عمودمنصف $\overline{BC}$ باشد. پس اگر این دو عمودمنصف یکدیگر را در نقطه‌ای مانند

O قطع کنند، آنگاه: OA=OB=OC و در نتیجه دایره به مرکز O و شعاع یکی از این پاره‌خط‌ها از هر سه رأس مثلث می‌گذرند. البتـه عمودمنصف $\overline{AC}$ هـم حتماً از نقطهٔ O می‌گذرد؛ چرا؟
با توجه به مقدمهٔ بالا نتیجهٔ زیر را داریم:

عمودمنصف‌های هر مثلث در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را می‌برند که نقطهٔ O از هر سه رأس مثلث به یک فاصله اســت. پس این نقطه مرکز دایره‌ای است که از سه رأس مثلث می‌گذرد. این دایره را «دایرهٔ محیطی» مثلث نیز می‌نامند.

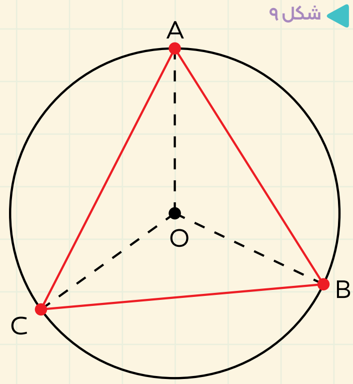
اکنون که با این ویژگی مهم مثلث آشنا شدیم، می‌توانیم تقارن‌های دورانی مثلث و حتــی چندضلعی‌ها را بررســی کنیم. زیرا، تقارن دورانی چون وابسته به دوران است، پس دایره در آن نقش اساسی دارد. هر نقطه و نقطهٔ دوران‌یافتهٔ آن روی یک دایره به مرکز دوران واقع‌اند (شکل ۸).

شکل ۸



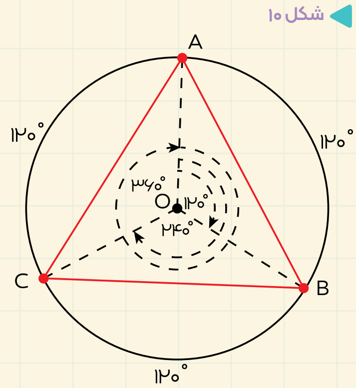
حال پرســش اصلــی را کامل‌تر مطرح می‌کنیم: **«در چه صورت مثلث تقارن دورانی غیر همانی دارد؟»**
بیان کردیــم که هر شــکل دارای یک تقارن همانی یا دوران °۳۶۰ است. اکنون می‌خواهیم ببینیم در چه صورت مثلث تقارن غیرهمانی دارد؟
در تقارن دورانی چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ باید دورانی پیدا کنیم که تحت آن، مثلاً رأس A روی رأس B و رأس B روی رأس C و بالاخــره رأس C روی رأس A واقع شــود. پس اگر O مرکز این دوران باشد، اولاً باید داشته‌باشیم: OA=OB و OB=OC. در نتیجــه: OC=OA. یعنی O مرکز این دوران از هر سه رأس به یک فاصله باشد که با توجه به ویژگی که بالا بیان کردیم، O باید مرکز دایره‌ای باشد که محل تلاقی ســه عمودمنصف مثلث است (شکل ۹). اما آیا این کافی است یا شرط دیگری نیز لازم داریم؟

شکل ۹



بله با کمی دقت مشــاهده می‌کنیم که باید اندازه‌های ســه زاویهٔ AOB، BOC و COA نیز برابر باشــند. زیرا وقتی A روی B و B روی C واقع می‌شــود، باید C نیز روی A واقع شــود. این سه زاویه اگر اندازه‌های برابر داشــته باشند، اندازهٔ هر یک باید چقدر باشد؟
اگر اندازهٔ هــر یک را α فرض کنید، باید 3α یک دور کامل یعنی °۳۶۰ شود. پس: α=۱۲۰°. در نتیجه مثلث ABC (شکل ۱۰) بایــد یک مثلث متســاوی‌الاضلاع باشد.

شکل ۱۰



نتیجــه: هر مثلث در صورتــی تقــارن دورانی یا چرخشی غیرهمانی دارد که متساوی‌الاضلاع باشد.

بنابراین، هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای یــک تقارن دورانی با زاویــه‌ای به اندازهٔ °۱۲۰ است. این تقارن را به‌صورت R_{120° نشان می‌دهیم.
دوباره بــه شــکل ۱۰ برمی‌گردیم. آیا تقارن دیگــری نیز می‌توانید برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیدا کنید؟

با کمی دقت مشــاهده خواهید کرد که با یک دوران °۲۴۰=۱۲۰×۲ می‌توانیم، A را روی C و B را روی A و C را روی B قرار دهیم. یعنی R_{240° نیز یک تقارن دورانی یا چرخشــی به مرکز O اســت. و بالاخــره، تقارن R_{360° کــه از ابتدا نیز مشخص بوده است.

نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه تقارن دورانی یا چرخشی دارد:
R_{120°، R_{240° و R_{360°

بنابراین، هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ســه تقارن خطی و ســه تقارن دورانی است.
اگر بخواهیم هرچــه را که تاکنون بیان کرده‌ایم مرور کنیم، باید توجه داشــته باشــیم که تقارن‌های خطــی به تبدیل بازتاب وابسته هستند و نقش عمودمنصف پاره‌خط‌ها در آن‌ها اساسی است.
تقارن‌های دورانی نیــز به تبدیل دوران وابسته هستند و رسم دایره‌ها به تعیین این تقارن‌ها کمک می‌کند.
بین چهارضلعی‌ها مشــاهده کردیم که مربع دارای چهار تقــارن خطی و چهار تقارن دورانی اســت. در مورد تقارن‌های هر چهارضلعی نیز مشابه مثلث می‌توان بحــث کرد. هر چهارضلعی ۰، ۱، ۲ یا ۴ تقارن خطی می‌تواند داشته باشد. به این معنی که هیچ چهارضلعی وجود ندارد که دارای ســه تقارن خطی باشد. همچنین هر چهارضلعــی حداکثر چهــار تقارن دورانی دارد.